14th Middle European Mathematical Olympiad 2020

Soutěž jednotlivců
29. srpna 2020

Czech version

Příklad I–1

Označme $\mathbb{N}$ množinu kladných celých čísel. Najděte všechna kladná celá čísla k, pro která existují funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že g nabývá nekonečně mnoha hodnot a rovnost

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

platí pro všechna kladná celá čísla n.

Poznámka. Zápisem f^i značíme funkci f aplikovanou i-krát, tj. $f^i(j) = \underbrace{f(f(\dots f(f}_{i\text{-krát}}(j))\dots))$.

Příklad I–2

Kladné celé číslo N nazveme *nakažlivé*, pokud existuje 1000 po sobě jdoucích nezáporných celých čísel takových, že součet všech jejich číslic je roven N. Najděte všechna nakažlivá kladná celá čísla.

Příklad I–3

Budiž ABC ostroúhlý různostranný trojúhelník s kružnicí opsanou ω a označme I střed kružnice jemu vepsané. Předpokládejme, že ortocentrum H trojúhelníku BIC leží uvnitř ω. Označme M střed delšího oblouku BC kružnice ω. Dále označme N střed kratšího oblouku AM kružnice ω.

Dokažte, že existuje kružnice, jež se dotýká ω v bodě N a dále se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům BHI a CHI.

Příklad I–4

Najděte všechna kladná celá čísla n, pro něž existují kladná celá čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ taková, že

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.