Aufgabe I–1

Sei $\mathbb{N}^+$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen k, für die Funktionen $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ und $g\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ existieren, sodass g unendlich viele Werte annimmt und

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

für jede positive ganze Zahl n gilt.

Anmerkung: Hierbei bezeichnet f^i die i-fache Anwendung von f, d.h. $f^i(j) = \underbrace{f(f(\dots f(f}_{i\text{ Mal}}(j))\dots))$.

Aufgabe I–2

Wir nennen eine positive ganze Zahl N *infektiös*, wenn es 1000 aufeinanderfolgende nicht-negative ganze Zahlen gibt, sodass die Summe aller ihrer Ziffern N ergibt. Bestimme alle infektiösen positiven ganzen Zahlen.

Aufgabe I–3

Es sei ABC ein spitzwinkliges nicht-gleichschenkliges Dreieck mit Umkreis ω und Inkreismittelpunkt I. Wir nehmen an, der Höhenschnittpunkt H von BIC liege innerhalb von ω. Sei M der Mittelpunkt des größeren Kreisbogens BC von ω. Sei N der Mittelpunkt des kürzeren Kreisbogens AM von ω.

Beweise, dass es einen Kreis gibt, der sowohl ω in N als auch die Umkreise von BHI und CHI berührt.

Aufgabe I–4

Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die positive ganze Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ existieren, sodass

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1$$

gilt.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.