Zadatak I–1

Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva. Odredi sve prirodne brojeve k za koje postoje funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da g poprima beskonačno mnogo vrijednosti i da jednakost

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

vrijedi za sve prirodne brojeve n.

(*Napomena.* Zapis f^i označava primjenu funkcije f i puta, tj., $f^i(j) = \underbrace{f(f(\dots f(f}_{i \text{ puta}}(j))\dots))$.)

Zadatak I–2

Kažemo da je prirodan broj N *zarazan* ako postoji 1000 uzastopnih nenegativnih cijelih brojeva kojima je ukupna suma svih znamenaka jednaka N. Odredi sve zarazne prirodne brojeve.

Zadatak I–3

Dan je šiljastokutan i raznostraničan trokut ABC, njemu opisana kružnica ω i središte njemu upisane kružnice I. Pretpostavimo da ortocentar H trokuta BIC leži unutar kružnice ω. Neka je M polovište duljeg luka BC kružnice ω. Neka je N polovište kraćeg luka AM kružnice ω.

Dokaži da postoji kružnica koja dira kružnicu ω u točki N te dira kružnice opisane trokutima BHI i CHI.

Zadatak I–4

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi $x_1, x_2, \dots, x_n$ takvi da vrijedi

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.