Individualiosios varžybos
2020 m. rugpjūčio 29 d.

Lithuanian version

Užduotis I–1

Natūraliųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{N}$. Nustatykite visus natūraliuosius skaičius k, kuriems egzistuoja tokios funkcijos $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ir $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kad g reikšmių aibė begalinė, o lygybė

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

tenkinama su kiekvienu natūraliuoju n.

(*Pastaba.* Čia f^i reiškia funkcijų kompoziciją, kur vienintelė funkcija f imama i kartų, t. y., $f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{i \text{ kartų}}(j))\ldots)).$)

Užduotis I–2

Natūralųjį skaičių N vadinsime *kibliu*, jei egzistuoja 1000 iš eilės einančių neneigiamų sveikųjų skaičių, kurių visų skaitmenų suma lygi N. Nustatykite visus kiblius natūraliuosius skaičius.

Užduotis I–3

Duotas smailusis įvairiakraštis trikampis ABC su apibrėžtiniu apskritimu ω ir įbrėžtinio apskritimo centru I. Trikampio BIC aukštinių sankirta H yra apskritimo ω viduje. Taškas M dalija pusiau apskritimo ω ilgesnįjį lanką BC. Taškas N dalija pusiau apskritimo ω trumpesnįjį lanką AM.

Įrodykite, kad egzistuoja apskritimas, vienu metu liečiantis apskritimą ω taške N bei trikampių BHI ir CHI apibrėžtinius apskritimus.

Užduotis I–4

Nustatykite visus natūraliuosius skaičius n, kuriems egzistuoja natūralieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tenkinantys lygybę

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.