14th Middle European Mathematical Olympiad 2020

Zawody indywidualne
29 sierpnia 2020

Polish version

Zadanie I–1

Niech $\mathbb{N}$ będzie zbiorem dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite k, dla których istnieją takie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że g przyjmuje nieskończenie wiele wartości oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k.$$

Uwaga. f^i oznacza i-krotne złożenie funkcji f, tj. $f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{i \text{ razy}}(j))\ldots))$.

Zadanie I–2

Dodatnią liczbę całkowitą N nazwiemy *zakaźną*, jeżeli istnieje 1000 kolejnych nieujemnych liczb całkowitych, dla których suma wszystkich cyfr tych liczb jest równa N. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby zakaźne.

Zadanie I–3

Dany jest ostrokątny, różnoboczny trójkąt ABC, w którym ω jest okręgiem opisanym, a I jest środkiem okręgu wpisanego. Załóżmy, że ortocentrum H trójkąta BIC leży wewnątrz ω. Niech M będzie środkiem dłuższego łuku BC okręgu ω. Niech N będzie środkiem krótszego łuku AM okręgu ω.

Udowodnić, że istnieje okrąg styczny do ω w punkcie N oraz styczny do okręgów opisanych na trójkątach BHI oraz CHI.

Zadanie I–4

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, że

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.