Naloga I–1

Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil. Določi vsa naravna števila k, za katera obstajata funkciji $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tako da je v zalogi vrednosti g neskončno mnogo števil in

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

velja za vsa naravna števila n.

(*Opomba.* Tukaj f^i označuje funkcijo f uporabljeno i-krat zapored, to je $f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{i\text{-krat}}(j))\ldots)).$)

Naloga I–2

Naravnemu številu N pravimo, da je *nalezljivo*, če obstaja 1000 takih zaporednih nenegativnih celih števil, da je vsota vseh njihovih števk enaka N. Poišči vsa nalezljiva naravna števila.

Naloga I–3

Naj bo ABC ostrokotni raznostranični trikotnik in naj bosta ω njegova očrtana krožnica in I njegovo središče včrtane krožnice. Denimo, da višinska točka H trikotnika BIC leži znotraj ω. Naj bo M razpolovišče daljšega loka $\widehat{BC}$ krožnice ω in naj bo N razpolovišče krajšega loka $\widehat{AM}$ krožnice ω.

Dokaži, da obstaja krožnica tangentna na ω v N in tangentna na očrtani krožnici trikotnikov BHI in CHI.

Naloga I–4

Poišči vsa naravna števila n, za katera obstajajo naravna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tako da je

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.